

Στοιχεία Άρθρου

| | |
|----------------|---------------------------------------|
| Περιοδικό | Μαθηματική Επιθεώρηση |
| Αρ. Τεύχους | Τεύχος 27 |
| Περίοδος | Β' εξάμηνο 1984 |
| Συγγραφέας | Πέτρος Οικονόμου |
| Αρ. Άρθρου | 6 |
| Σελίδες | 79-94 |
| Γλώσσα | Ελληνική |
| Λέξεις Κλειδιά | - |

Η ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέτρος Οικονόμου

Υπεύθυνος κρίσης: Σμαρώ Αλεξάνδρου

Κατ'αρχήν θα ήθελα να διευκρινίσω ότι το περιεχόμενο της ομιλίας μου είναι πολύ λιγότερο φιλόδοξο από τον τίτλο της όπως τουλάχιστον είναι γραμμένος στο πρόγραμμα.

Κατέληξα όμως στο συμπέρασμα ότι μια εγκυκλοπαιδικού χαρακτήρα παρουσίαση ορισμένων απόψεων γύρω από την αντιμετώπιση του λάθους στα μαθηματικά, θα είχε σαφώς περιορισμένη λειτουργικότητα, μια που φεύγοντας από εδώ όλοι θα σκεφτόμασταν πόσο μακριά βρίσκεται η εφαρμογή τους από τη σημερινή εκπαιδευτική πραγματικότητα στη χώρα μας.

Κι αφού στόχος αυτής της "εβδομάδας" είναι να μας προβληματίσει γύρω από τη διδακτική των μαθηματικών με τέτοιο τρόπο που ο προβληματισμός μας να είναι μετατρέψιμος σε καθημερινή διδακτική πρακτική, θεώρησα χρησιμότερο να περιοριστώ στην παρουσίαση ενός πειράματος με αντικείμενο τη θεραπεία των λαθών, πειράματος που έγινε σε τάξη με συνηθισμένους μαθητές, δάσκαλο χωρίς ιδιαίτερες γνώσεις διδακτικής, σε συνθήκες που δεν βρίσκονται μακριά από την Ελληνική πραγματικότητα.

Θα ήθελα εδώ να τονίσω ότι τα συμπεράσματα που θα επιχειρήσω να βγάλω δεν έχουν την αξίωση να αποτελέσουν θέσεις γενικής ισχύος λόγω του ότι δεν τηρήθηκαν

Σημείωση: Η εργασία αυτή παρουσιάστηκε στη "μαθηματική εβδομάδα" που οργανώθηκε από το παράρτημα Θεσ/κης της Ε.Μ.Ε το Μάρτιο του 1982.

στοιχειώδεις ερευνητικές προϋποθέσεις, όπως ένα επαρκές- από στατιστική άποψη - δείγμα, ομάδες ελέγχου κλπ. Είναι λοιπόν αυτονόητο ότι όποιες απόψεις διατυπωθούν στη συνέχεια, δεν προτείνονται για να υιοθετηθούν, αλλά και μόνο για να αποτελέσουν κίνητρο για κάποιο παραπέρα προβληματισμό.

Το πείραμα που θα περιγράψω, έγινε πριν 2 χρόνια σε ένα ιδιωτικό σχολείο στη Γαλλία και το μοναδικό του πλεονέκτημα σε σχέση με την αντίστοιχη ελληνική πραγματικότητα ήταν ο μικρός αριθμός μαθητών κάθε τάξης, πλεονέκτημα που αντισταθμιζόταν απόλυτα από το εξαιρετικά χαμηλό επίπεδο των μαθητών, αφού το σχολείο αυτό συγκέντρωνε παιδιά που αντιμετώπιζαν ιδιαίτερες δυσκολίες στο να παρακολουθήσουν το πρόγραμμα των κανονικών Δημοσίων σχολείων.

Στους 13 μαθητές της αντίστοιχης με τη δική μας Α' Λυκείου τάξης, αφού σε προηγούμενα μαθήματα είχαν διδαχθεί οι διανυσματικοί χώροι και οι ιδιότητές τους, διδάχθηκε το κεφάλαιο των γραμμικών συναρτήσεων. Η διδασκαλία διήρκεσε 3 διδακτικές ώρες και έγινε με τον παραδοσιακό "μετωπικό" τρόπο, όπου δηλαδή ο καθηγητής απευθύνεται στο μέσο όρο της τάξης, εξαντλώντας βέβαια, στην περίπτωσή μας, κάθε περιθώριο για ενεργό συμμετοχή των μαθητών. Στη διάρκεια των 3 αυτών διδακτικών ωρών οι μαθητές αντιμετώπισαν μία σειρά ασκήσεων που έπρεπε να λύσουν στα τετράδιά τους και στο τέλος η σωστή λύση δίνονταν από κάποιο μαθητή ή τον καθηγητή στον πίνακα.

Στα 30 λεπτά της τρίτης διδακτικής ώρας δόθηκε στους μαθητές η παρακάτω ερώτηση σαν test.

" Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γραμμικές"

1. E διαν. χώρος επί το R

$$f: E \rightarrow E$$

$$\vec{u} \rightarrow -3\vec{u}$$

2. $g: R \rightarrow R$

$$x \rightarrow 2x+1$$

3. $h: R^2 \rightarrow R$

$$(x, y) \rightarrow x+y$$

Τα πρόχειρα που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στη διάρκεια της παράδοσης, καθώς και οι κόλλες των test συγκεντρώθηκαν και έγινε καταγραφή των λαθών σε κάθε ζήτημα και για κάθε μαθητή. Στη συνέχεια επιχειρήθηκε η ερμηνεία των λαθών που συγκεντρώθηκαν και η ομαδοποίησή τους με βάση αυτή την ερμηνεία.

Θα ήθελα να σταθώ λίγο σ' αυτό το σημείο, για να τονίσω μια πρώτη δυσκολία. Υπάρχουν λάθη, φαινομενικά διαφορετικά που όμως ξεκινούν από μια κοινή αφετηρία, τα αίτια δηλαδή που τα προκαλούν είναι κοινά, ενώ συμβαίνει και το αντίθετο, λάθη δηλαδή που είναι φαινομενικά ίδια να ξεκινούν από τελείως διαφορετικές αιτίες. Επομένως δεν είναι δυνατή μια κατάταξη των λαθών κατά κατηγορίες χωρίς να προηγηθεί μια πρώτη προσέγγιση στις αιτίες που μπορεί να τα προκάλεσαν.

Από την άλλη μια τέτοια προσέγγιση δίνει την ευκαιρία να εντοπίσουμε και να παραλείψουμε τα λάθη που οφείλονται σε μια στιγμιαία απροσεξία ή στην κούραση του μαθητή, όσα δηλαδή ενώ θα μπορούσαν να επαναληφθούν αρκετές φορές στη δουλειά ενός μαθητή, δεν επαναλαμβάνονται, δεν "αναπαράγονται" κάθε φορά που στο ίδιο γραπτό δίνεται η ευκαιρία.

Εναγουρίζοντας στο πείραμα, θα παρουσιάσουμε μόνο μια κατηγορία λαθών από αυτές που επισημάνθηκαν. Τα λάθη

αυτής της κατηγορίας μπορούν να παρασταθούν με τη μορφή

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = -3\vec{u}-3\vec{v}$$

Ο συλλογισμός που γίνεται στην πραγματικότητα στο μυαλό του μαθητή είναι

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = -3\vec{u}-3\vec{v}$$

μόνο που το δεύτερο μέλος της ισότητας δεν εμφανίζεται πάντοτε στο γραπτό. Το λάθος αυτό εμφανίζεται με μεγάλη ποικιλία μορφών, στα test 9 παιδιών, σε σύνολο 13, και η παραπάνω διατύπωση είναι μια σχηματοποιημένη μορφή των ποικίλων διατυπώσεων που συναντήσαμε στα γραπτά και που προέκυψε από την πρώτη προσπάθεια ερμηνείας των λαθών που συγκεντρώθηκαν. Ο κοινός παρονομαστής όλων αυτών των λαθών που εντάξαμε στην κατηγορία που εξετάζουμε, ήταν η διαπίστωση ότι η σχέση.

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

θεωρείται από τους μαθητές ότι ισχύει πάντοτε, ανεξάρτητα από το αν τους ζητούμε να εξετάσουν την ισχύ της. Έχοντας μάθει χρόνια τώρα να δουλεύουν με γραμμικές συναρτήσεις, αντιλαμβάνονται τη γραμμικότητα σαν αυτονόητη και δεν θα ήταν καθόλου άστοχο, κατά τη γνώμη μου, να αντιμετωπίσαμε και το κλασσικό σφάλμα

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

κάτω απ'αυτή την οπτική γωνία.

Στο σημείο αυτό θα μου επιτραπεί μια πολύ σύντομη παρένθεση.

Το λάθος που επισημάνθηκε μπορεί να ενταχθεί σε μια γενικότερη κατηγορία λαθών που εμφανίζονται, όπου η εμπειρία του μαθητή από την καθημερινή πραγματικότητα ή α-

κόμη και από την προηγούμενη μαθηματική παιδεία του έρχεται σε αντίθεση με την μαθηματική μετάφραση του προβλήματος.

Χαρακτηριστικό αυτής της κατηγορίας είναι το παρακάτω πρόβλημα, που δημιουργεί σοβαρές δυσκολίες σε μικρούς μαθητές του δημοτικού:

"Ξόδεψα 27 δραχμές το πρωί και 32 δραχμές το απόγευμα. Πόσες δραχμές ξόδεψα όλη την ημέρα;"

Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη λέξη "ξοδεύω" σαν αφαίρεση και έχουν δίκιο. Η σύγκριση λοιπόν είναι μεγάλη όταν τους ζητάμε να λύσουν ένα τέτοιο πρόβλημα κάνοντας πρόσθεση.

Κλείνοντας την παρένθεση και ξαναγυρίζοντας στις ομάδες λαθών που έχουμε ήδη συγκροτήσει θα αντιμετωπίσουμε μια νέα δυσκολία. Με ποιά απ'όλα τα λάθη θ'ασχοληθούμε στη διόρθωση; Έχουμε ήδη αποκλείσει τα λάθη που οφείλονται σε μια στιγμιαία απροσεξία, τα μη "αναπαραγόμενα" δηλαδή λάθη, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Πώς όμως είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν τα ατομικά λάθη, όσα δηλαδή έγιναν από ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών ή ακόμη και από ένα μόνο μαθητή, στα πλαίσια πάντα των 2/3 της επόμενης διδακτικής ώρας που θα διατεθούν για τη διόρθωση;

Ο καθηγητής της τάξης προσκολλημένος πάντα στη μετωπική αντίληψη για τη διδασκαλία, αποφασίζει να αντιμετωπίσει τα λάθη του μέσου όρου, τα λάθη δηλαδή που εμφανίζονται σε ένα ανησυχητικό αριθμό μαθητών. Τα αποτελέσματα αυτής της απόφασης θα τα δούμε αργότερα.

Τελικά προετοιμάζεται το διορθωτικό μάθημα. Ο καθηγητής της τάξης θα προσπαθήσει μέσα από τη συζήτηση ειδικά επιλεγμένων παραδειγμάτων να πετύχει την ανάδειξη των λαθών, την αντιπαράθεση της λαθεμένης δραστηριότητας των μαθητών με τη σωστή, καθώς και την ανάλυση των λαθεμένων βημάτων που οδήγησαν στην αποτυχία της απόδειξης.

Στο συγκεκριμένο λάθος που χρησιμοποιήθηκε σαν παράδειγμα μεγάλο βάρος, όσον αφορά τη διόρθωση, πέφτει στη χρησιμοποίηση παραδείγματος που να δείχνει ότι η γραμμικότητα που οι μαθητές θεωρούν διαισθητικά ως γενικώς ισχύουσα, δεν ισχύει πάντοτε.

Η διόρθωση διήρκεσε περίπου 40' λεπτά και δεν έγινε με τον ίδιο τρόπο για όλα τα λάθη. Ο καθηγητής, προσπάθησε πολλές φορές να περιοριστεί στο να προκαλεί απλώς συζητήσεις μεταξύ των μαθητών με σκοπό την ανάδειξη ενός λάθους.

Ξαναγυρίζοντας στο παράδειγμά μας μπορούμε να προσθέσουμε ότι η όλη συζήτηση που παρακολουθήσαμε και κυρίως η χρήση του μη γραμμικού παραδείγματος βοήθησαν στο να αναδειχτεί πραγματικά η ερμηνεία του λάθους αυτής της κατηγορίας, να επιβεβαιώσει αλλά και να διευρύνει την αρχική μας υπόθεση.

Οι μαθητές θεωρούν τη γραμμικότητα σαν γενικώς ισχύουσα, με αποτέλεσμα να τη χρησιμοποιούν μέσα στην απόδειξη, τη στιγμή που καλούνται να την αποδείξουν και μάλιστα να φτάνουν σε σοβαρότατες μαθηματικές υπερβάσεις, μόνο και μόνο για να αποδείξουν ότι οποιαδήποτε συνάρτηση είναι γραμμική. Διαπιστώθηκε ότι η ερώτηση "εξετάστε τη γραμμικότητα" γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές σαν "αποδείξτε τη γραμμικότητα".

Στο σημείο αυτό εμφανίζεται μια άλλη διάσταση του προβλήματος, διάσταση που έχει σχέση με τον τρόπο που μεταφράζει ο μαθητής την ερώτηση που του τίθεται. Επομένως πριν καλέσουμε το μαθητή να δραστηριοποιηθεί γύρω από ένα μαθηματικό πρόβλημα, είναι απαραίτητο να περάσουμε από τη φάση της διεξοδικής συζήτησης γύρω απ' αυτό, είναι απαραίτητο να το αναλύσουμε και να το φωτίσουμε απ' όλες τις μεριές, έτσι ώστε το πρόβλημα να γίνει σαφές και καθαρό στο μυαλό των μαθητών.

Και μάλιστα το ζήτημα γίνεται σοβαρότερο αν λάβουμε υπόψη μας το ότι η γλώσσα του παιδιού απέχει από τη γλώσσα του ενήλικου και η απόσταση αυτή γίνεται μεγαλύτερη όταν έχουμε να κάνουμε με μικρότερα παιδιά. Όλοι μας, αν ανατρέξουμε στη διδακτική μας εμπειρία θα συναντήσουμε περιπτώσεις, ιδίως σε μικρές τάξεις, όπου μας είναι αδύνατο να καταλάβουμε τί θέλει να πει κάποιος μαθητής διατυπώνοντας μια απορία του και έρχεται κάποιος άλλος μαθητής για τον οποίον η απορία είναι καθαρή και κυριολεκτικά μας μεταφράζει την ερώτηση του συμμαθητή του.

Μια από τις πιο σημαντικές παραμέτρους αυτού του ζητήματος είναι και εκείνη που αφορά το λεξιλόγιο.

Ο δάσκαλος δεν μπορεί να θέτει σε δοκιμασία τις λεξιλογικές δυνατότητες των μαθητών θεωρώντας ότι η απόσταση ανάμεσα στις λέξεις "εξετάστε" και "αποδείξτε" είναι για τους μαθητές των 15 με 16 ετών τόσο φανερή, όσο και για τον καθηγητή των μαθηματικών. Θα χρησιμοποιήσουμε το λόγο του Page για να περιγράψουμε μια κατάσταση αποτυχίας των μαθητών:

"Όταν τα παιδιά δίνουν λάθος απαντήσεις, λέει ο Page, δεν σημαίνει πάντα ότι έχουν κάνει λάθος, αλλά μπορεί και να σημαίνει ότι τα παιδιά απαντούν σε άλλη ερώτηση".

Το ζήτημα λοιπόν της μετάφρασης ενός προβλήματος από τον μαθητή έχει και την αντίστροφη πλευρά. Τη μετάφραση μιας απάντησης από τον καθηγητή. Και το σημείο αυτό παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην ερμηνεία ενός λάθους.

Θα καταφύγω και πάλι σ' ένα παράδειγμα παρμένο από τον Holt. Ο Holt αναφέρεται σε ένα γνωστό πείραμα του Piaget, ο οποίος ζήτησε από ένα παιδί να παρατηρήσει δυο ραβδάκια ίδιου μήκους, που τα τοποθέτησε παράλληλα και έτσι ώστε τα άκρα τους να βρίσκονται στο ίδιο ύψος και να

του πει ποιό ήταν μακρότερο. Το παιδί απάντησε ότι ήταν ίσα. Κατόπιν ο Piaget μετακίνησε το ένα ραβδάκι, ώστε τα άκρα του να μη βρίσκονται στο ίδιο ύψος με το άλλο και επανέλαβε την ερώτηση. Αυτή τη φορά το παιδί απάντησε ότι ένα από τα ραβδάκια ήταν μικρότερο. Όσες φορές επανέλαβε το πείραμα, πέτυχε τα ίδια αποτελέσματα. Το πείραμα αυτό συνέβαλε στο να διατυπώσει ο Piaget την άποψη ότι τα παιδιά πριν από μια συγκεκριμένη ηλικία (γύρω στα 5) δεν είναι σε θέση να συλλάβουν τη σταθερότητα του μήκους. Ίσως όμως ο Piaget γράφει ο Holt δεν σκέφτηκε ότι το παιδί θα μπορούσε να είχε καταλάβει την ερώτηση διαφορετικά από ότι την διατύπωσε και ότι η φράση "πιο μακρύ" θα μπορούσε να μεταφραστεί από το παιδί με τη φράση "αυτό που προεξέχει". Μόνο μετά από μια έντονη άσκηση θα καταλάβει το παιδί ότι η ερώτηση "πιο από τα δύο είναι μακρότερο" σημαίνει "αν τα βάλουμε και τα δύο στην ίδια γραμμή πιο θα προεξέχει;"

θα κλείσω κι αυτή την παρένθεση υπενθυμίζοντας μια φράση από το βιβλίο του Mialaret: "Η μάθηση των μαθηματικών":

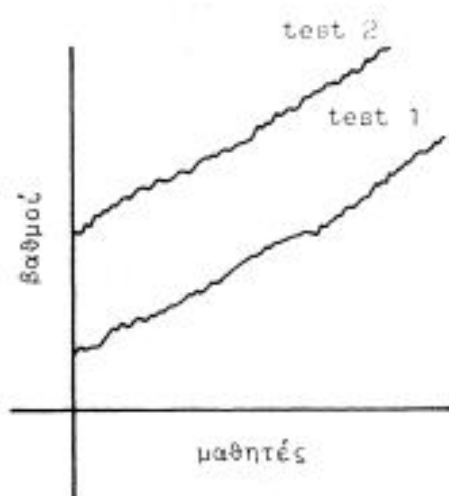
"Ένα πρόβλημα καλά διατυπωμένο, είναι ένα πρόβλημα λυμένο κατά το ήμισυ".

Ξαναγυρίζω στο πείραμα για να δούμε τα αποτελέσματα της διόρθωσης, αφού αναφέρω ότι στο τέλος του διορθωτικού μαθήματος δόθηκε νέο test στους μαθητές, παρόμοιο, όσον αφορά το περιεχόμενο, αλλά και τη δυσκολία των ασκήσεων, με το προηγούμενο.

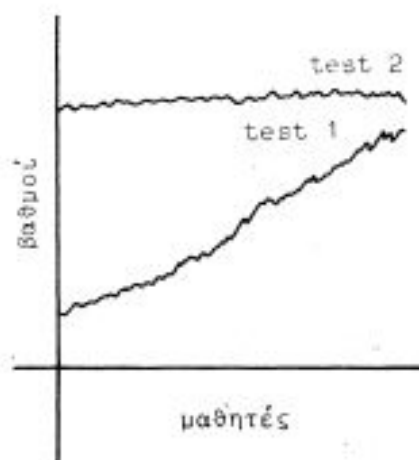
Στο νέο test παρατηρούμε, άνοδο του μέσου βαθμού της τάξης κατά 5 μονάδες. Ενώ στο πρώτο test ο μέσος βαθμός της τάξης ήταν 7, στο δεύτερο ο μέσος βαθμός έφτασε το 12 (είναι απαραίτητο να σημειωθεί ότι η βαθμολογία των γραπτών έγινε μόνο για τις ανάγκες του πειράματος και δεν χρησιμοποιήθηκε καθόλου για την αξιολόγηση των μαθητών,

πράγμα που τονίστηκε ιδιαίτερα στους μαθητές). Επίσης έχουμε βαθμολογική άνοδο όλων ανεξάρτητα των μαθητών και μάλιστα η άνοδος αποκλίνει, όσον αφορά τους περισσότερους μαθητές λίγο από τη μέση άνοδο της τάξης. Τέσσερες μόνο μαθητές αποκλίνουν από τη μέση άνοδο κατά περισσότερες από 2 μονάδες, αλλά ξαναβλέποντας τη μαγνητοταινία του πειράματος παρατηρήσαμε ότι οι δύο απ' αυτούς ανέπτυξαν πολύ έντονη δραστηριότητα στη διάρκεια του διορθωτικού μαθήματος, ενώ οι άλλοι δύο που παρουσίασαν ελάχιστη άνοδο έδιναν την εντύπωση ότι ήταν απόντες.

Θα ξαναγυρίσουμε τώρα στη μέθοδο που εφαρμόστηκε για τη διόρθωση και που είχε σαν αποτέλεσμα να αγνοηθούν τα ατομικά λάθη. Παρατηρήθηκε λοιπόν ότι γι' αυτά τα λάθη δεν υπήρξε παρά ελάχιστη ή και καθόλου βελτίωση. Το ότι ως προς τα λάθη που αφορούν όλη την τάξη η βελτίωση ήταν εμφανής, ενώ ως προς τα λάθη που αφορούν συγκεκριμένους μαθητές δεν μπορούμε να μιλήσουμε για επιτυχία, τεκμηριώνεται και από τη γραφική παράσταση της βαθμολογίας των μαθητών στα δύο tests (Σχήμα 1).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Παρατηρούμε μια παράλληλη κίνηση των δύο γραμμών, πράγμα που φανερώνει ότι η βελτίωση αφορά το συγκεκριμένο λάθος, αλλά δεν φτάνει μέχρι του σημείου να αφορά και τον συγκεκριμένο μαθητή, δεν περιλαμβάνει δηλαδή και τα προσωπικά του λάθη. Στην περίπτωση που η διόρθωση επεκτείνονταν και στα ατομικά λάθη, η γραφική παράσταση της βαθμολογίας θα ήταν όπως στο σχήμα 2. Έχουμε όμως το δικαίωμα να εγκαταλείψουμε τους μαθητές που αποκλίνουν από το μέσο όρο της τάξης; Έχουμε το δικαίωμα να αγνοήσουμε τα λάθη τους και να μην τους βοηθήσουμε να τ'αντιμετωπίσουν; Το να τους βοηθήσουμε ουσιαστικά προϋποθέτει, όπως θα μας δοθεί η ευκαιρία να εξετάσουμε στη συνέχεια, την παρουσίαση εκ μέρους του μαθητή που έκανε το συγκεκριμένο λάθος, της πορείας που ακολούθησε, την ανάδειξη του λάθους του μέσα από τη συζήτηση στην τάξη, την ανάλυση και τη διόρθωσή του με την ενεργό συμμετοχή του ίδιου του μαθητή.

Αλλά μια τέτοια δραστηριότητα θα απαιτούσε για κάθε διόρθωση τόσες διδακτικές ώρες που κανένας καθηγητής δεν θα μπορούσε να διαθέσει. Και το πρόβλημα δεν αφορά μόνον τα λάθη, αλλά όλη τη διαδικασία μάθησης των παιδιών που παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες και που ο αριθμός τους είναι πολύ μεγαλύτερος από ότι θέλουμε να πιστεύουμε για να καθησυχάζουμε τη συνείδησή μας.

Δεν μπορούμε βέβαια να θυσιάσουμε χρήσιμο χρόνο γι' αυτούς τους μαθητές και γιατί πιέζει το αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά και γιατί δεν έχουμε το δικαίωμα να υποβιβάσουμε το επίπεδο δουλειάς της τάξης, πράγμα που θα ήταν σε βάρος των υπολοίπων μαθητών.

Το πρόβλημα είναι άλυτο σε παραδοσιακές συνθήκες διδασκαλίας, στη διδασκαλία που ονομάζεται "μετωπική" και απευθύνεται στο μέσο όρο των παιδιών της τάξης.

Παραθέτω ένα απόσπασμα από μια μελέτη του καθηγητή της παιδαγωγικής κ. Ξωχέλλη με τίτλο "Θέματα Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης":

"Σε πολλές χώρες αμβλύνεται το παραπάνω πρόβλημα με συνεχείς προσπάθειες διαφοροποίησης της σχολικής εργασίας (δηλαδή ομαδοποίησης ή εξατομίκευσης της σχολικής εργασίας, έξω από τα τυπικά πλαίσια της Σχολικής τάξης) που έχουν σαν στόχο τους να προσαρμόσουν διδασκαλία και μάθηση στα "μέτρα", δηλαδή στα ενδιαφέροντα, τις ικανότητες και το ρυθμό εργασίας του κάθε μαθητή".

Ας ξαναγυρίσουμε όμως στη μελέτη των αποτελεσμάτων της διόρθωσης. Είχαμε συγκροτήσει συνολικά 7 κατηγορίες λαθών. Στη διόρθωση των τριών απ' αυτές τις κατηγορίες το λάθος αναδείχτηκε μόνο του μέσα από τη συζήτηση που έγινε στην τάξη. Οι μαθητές συνειδητοποιώντας την αποτυχία τους σε κάποιο σημείο του συλλογισμού τους, ξαναγυρίζουν πίσω, αναλύουν το συλλογισμό τους, βρίσκουν τί είναι αυτό που δεν "δούλεψε" καλά και διορθώνουν. Ο καθηγητής περιορίζει στο minimum το ρόλο του και παρεμβαίνει μόνο για να προκαλέσει τις δραστηριότητες που αναφέραμε.

Στις τρεις αυτές κατηγορίες λαθών μετρήθηκε διόρθωση ίση με 100, 89 και 64% επί του συνόλου των μαθητών.

Στις τρεις επόμενες κατηγορίες παρατηρήθηκε διόρθωση 57, 50 και 43%. Στη διόρθωσή τους εφαρμόστηκε η παραδοσιακή διαδικασία. Ο καθηγητής επεσήμανε τα λάθη, τα ανέλυσε και οδήγησε τους μαθητές στη σωστή λύση με τη μέθοδο της ερωταπόκρισης. Είναι απαραίτητο να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι στη δεύτερη αυτή ομάδα λαθών εντάχθηκαν τα λάθη που θεωρήσαμε ότι ήταν πιο εύκολα στο ξεπέρασμά τους από τους μαθητές. Το τελευταίο λάθος, της 7ης δηλαδή κατηγορίας, αντιμετωπίστηκε με το να παρουσιαστεί η

σωστή λύση στον πίνακα από ένα μαθητή. Το ποσοστό διόρθωσης ήταν 0%. Ο μόνος που δεν το έκανε τη δεύτερη φορά ήταν ο ίδιος ο μαθητής, που το είχε λύσει σωστά και την πρώτη φορά.

(Πριν προχωρήσω θα ήθελα να επισημάνω τη σχετική αξία όλων των παραπάνω ποσοστών, μια που το πλήθος των μαθητών ήταν τόσο μικρό, που δεν ήταν δυνατόν να οδηγηθούμε σε ποσοστά μεγαλύτερης εγκυρότητας).

Νομίζω τώρα ότι είναι απαραίτητο να επιχειρήσω να γενικεύσω τα συμπεράσματα που βγήκαν από τη διόρθωση και τα αποτελέσματα που πέτυχε.

Στη φάση της διόρθωσης περιγράψαμε, αρκετά σχηματικά και απλουστευμένα είναι η αλήθεια, δύο διαφορετικές στάσεις του καθηγητή, που φανερώνουν δύο διαφορετικές αντιλήψεις για τα λάθη. Βέβαια η διάκριση δεν είναι εντελώς σαφής, γιατί η πρώτη στάση δεν ήταν οικεία, ούτε στον καθηγητή, ούτε στους μαθητές με αποτέλεσμα στη διάρκεια της εφαρμογής της, να έχουμε συχνά επιστροφή στη δεύτερη στάση. Έτσι θα ήμουν περισσότερο ακριβής αν μιλούσα για μια μέθοδο αντιμετώπισης των λαθών στη διάρκεια της οποίας εμφανίζονται και τα σπέρματα κάποιας άλλης.

Κάθε μία λοιπόν από τις δύο πρακτικές που εφαρμόστηκαν είναι προϊόν μιας διαφορετικής αντίληψης για το ρόλο του λάθους στη μάθηση των μαθηματικών και φυσικά εντάσσεται στα πλαίσια ενός διαφορετικού τρόπου διδασκαλίας.

Σύμφωνα με την πρώτη αντίληψη, που θα μπορούσα να τη χαρακτηρίσω σαν παραδοσιακή και που δυστυχώς είναι ο κανόνας, ο μαθητής, μπροστά σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, θεωρείται εφοδιασμένος με ένα αριθμό χρήσιμων μέσων, που ο δάσκαλος του έχει διδάξει τη χρήση τους, έτσι ώστε να φτάσει σε κάποιο αποτέλεσμα. Ο δάσκαλος συγκρίνει τη δραστηριότητα του μαθητή με τη δραστηριότητα ενός "αυτόματου",

που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει άψογα αυτά τα μέσα και ονομάζει λάθος ότι στη δραστηριότητα του μαθητή, έρχεται σε αντίθεση με τις δυνατές δραστηριότητες του "αυτόματου".

Έτσι το λάθος προδίδει απλά και μόνο την ανεπαρκή γνώση ενός συγκεκριμένου μαθηματικού ζητήματος και ο δάσκαλος πιστεύει ότι η καλή γνώση ενός μαθηματικού θέματος είναι αρκετή για την αποφυγή κάθε πιθανού λάθους. Ο δάσκαλος αυτός αρνείται το λάθος και δεν θέλει να το βλέπει. Το αντιλαμβάνεται μόνο σαν δείκτη της αποτυχίας του μαθητή και το χρησιμοποιεί μόνο για να τον βαθμολογήσει.

Κι όταν ακόμα ο αριθμός των λαθών είναι αρκετά μεγάλος ώστε να τον ανησυχήσει, περιορίζεται στην επανάληψη του σωστού, θεωρώντας ότι έτσι αντιμετωπίζει το πρόβλημα, μια που η ερμηνεία του για το λάθος είναι ότι "ο μαθητής δεν ξέρει το ζήτημα" ή στη χειρότερη περίπτωση ότι "ο μαθητής δε διάβασε". Κι όταν ο μαθητής επαναλαμβάνει το λάθος, βλέπουμε τον ίδιο δάσκαλο να αναρωτιέται "Γιατί το ξανακάνει, αφού του το εξήγησα τόσες φορές;".

Θα ήταν σκόπιμο πριν τελειώσουμε μ'αυτή την αντίληψη να δούμε και τις συνέπειές της.

Ο μαθητής καταλαβαίνοντας ότι είναι το αντικείμενο ενός διαρκούς ελέγχου, κάνει ότι του είναι δυνατό για να κρύψει τις αδυναμίες του, έτσι ώστε τα αποτελέσματα του ελέγχου να είναι όσο το δυνατόν ευνοϊκότερα γι'αυτόν. Στη χειρότερη περίπτωση τον βλέπουμε να αντιγράφει και στην καλύτερη να προσπαθεί να αποστηθήσει μηχανισμούς που να μπορεί να τους εφαρμόσει για να λύσει διάφορες κατηγορίες προβλημάτων, αυτόματα και χωρίς να καταλαβαίνει τη λύση που κάνει.

Βλέπουμε το μαθητή να βρίσκει άνετα τις ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού εφαρμόζοντας τον τύπο, αλλά να του είναι αδύνατο να βρεί τί αποτέλεσμα θα δώσει το τρι-

ώνυμο, αν στη θέση του x βάλουμε την τιμή μιας ρίζας του, γιατί έμαθε να λύνει μηχανικά την εξίσωση και δεν κατάλαβε τί σημαίνει λύνω μια εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Πώς όμως είναι δυνατόν να αντιμετωπίσουμε το λάθος που η παραδοσιακή διδασκαλία έχει τόσο ξορκίσει, έτσι ώστε να μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν μια "διδασκτική ευκαιρία;".

Στη σύγχρονη διδασκτική, η αποτυχία περιγράφεται σαν "ένδειξη μιας αντίφασης". Από τη στιγμή που ο μαθητής αντιλαμβάνεται την αποτυχία του μ' αυτό τον τρόπο, είναι υποχρεωμένος για να ξεπεράσει την αντίφαση, να γυρίσει πίσω, να αναλύσει όλη τη δραστηριότητά του, να εντοπίσει τα συγκεκριμένα λάθη που τον οδήγησαν στην αποτυχία και να μεταβάλλει τα μέσα που χρησιμοποιεί για να πλησιάσει το πρόβλημα ή τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιεί αυτά τα μέσα, να οικοδομήσει δηλαδή μια καινούργια μαθηματική συμπεριφορά, πιο αποτελεσματική.

Το λάθος εδώ είναι ο μηχανισμός που παρακινεί σε δράση, με στόχο είτε να οδηγήσει το μαθητή από ένα μοντέλο που χρησιμοποίησε για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα και που αποδείχτηκε ακατάλληλο σε ένα άλλο που σχετίζεται περισσότερο με το πρόβλημα, είτε να τον οδηγήσει σε μια σωστότερη χρήση του μοντέλου που ανταποκρίνεται μεν στο πρόβλημα, αλλά δεν χρησιμοποιήθηκε σωστά.

Ο ρόλος μάλιστα του λάθους κάτω απ' αυτήν την οπτική γωνία, αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε συνάρτηση με την έννοια του "επιστημολογικού εμπόδιου". Τη στιγμή που ο μαθητής αντιλαμβανόμενος το λάθος του σαν ένδειξη μιας αντίφασης, αναγκάζεται να απορρίψει μία γνώση που είχε προηγουμένως, τη στιγμή δηλαδή που το λάθος βοηθάει στο να εκδηλωθεί ένα συγκεκριμένο εμπόδιο, στο σύστημα των γνώσεων του μαθητή, εμφανίζεται μια διαδικασία στην πρα-

κτική της εκπαίδευσης, συγκρίσιμη με την ιστορική διαδικασία ανάπτυξης της επιστημονικής σκέψης.

Κωδικοποιώντας τη δραστηριότητα του μαθητή στα πλαίσια αυτής της σύγχρονης αντίληψης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο μαθητής:

- 1ον. Επισημαίνει το λάθος του.
- 2ον. Αντιλαμβάνεται, ότι το λάθος του είναι προϊόν μιας αντίφασης ανάμεσα στο μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποίησε ή στον τρόπο που το χρησιμοποίησε και στο σωστό μοντέλο ή στη σωστή χρήση του αντίστοιχα.
- 3ον. Ξαναγυρίζει πίσω προσπαθώντας να εντοπίσει το ακριβές σημείο της αντίφασης.
- 4ον. Επιχειρεί νέα προσέγγιση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας άλλο μοντέλο ή χρησιμοποιώντας το ίδιο μοντέλο με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με το συγκεκριμένο λάθος και τα συμπεράσματα που θα βγάλει από την ανάλυση των αιτιών που το προκάλεσαν.

Το ερώτημα που γίνεται είναι ποιά δραστηριότητα του δασκάλου θα οδηγήσει σε μια τέτοια συμπεριφορά του μαθητή. Η πρώτη απάντηση αφορά τις συνθήκες διδασκαλίας. Σε μια τάξη όπου το λάθος καταδιώκεται από το δάσκαλο, η αγωνία των μαθητών είναι τόση, που το λάθος δεν μπορεί να λειτουργήσει, θετικά, σαν μηχανισμός δηλαδή που αναγκάζει τον μαθητή να γυρίσει πίσω και να δει, τί δεν "δούλεψε" σωστά, αλλά τον εκτρέπει στην αναζήτηση συνταγών που θα του επιτρέψουν να αντιμετωπίζει τα προβλήματα με κάποια σιγουριά. Αυτό παρατηρείται ακόμη και στην περίπτωση που ο δάσκαλος, χρησιμοποιεί τα λάθη των μαθητών του για να βελτιώσει τη διδασκαλία του. Η καλλιέργεια λοιπόν κλίματος αμοιβαίου σεβασμού και εμπιστοσύνης είναι

θεμελιώδης προϋπόθεση για μια σύγχρονη πρακτική όσον αφορά την αντιμετώπιση των λαθών.

Θα προσθέσουμε ότι μια παρόμοια πρακτική είναι ανέφικτη σε συνθήκες "μετωπικής" διδασκαλίας, για τον απλούστατο λόγο ότι δεν υπάρχουν τα χρονικά περιθώρια μέσα στα οποία θα δημιουργηθεί το πλαίσιο για μια δραστηριότητα των μαθητών απέναντι στα λάθη τους, σαν αυτήν που περιγράψαμε προηγουμένως.

Είναι φανερό γιατί ισχύει αυτό, αν δούμε πως περιγράφει αυτό το πλαίσιο ο Aebli στο βιβλίο του "Διδακτική Ψυχολογία":

"Οι λαθεμένες δραστηριότητες των μαθητών που προέκυψαν κατά την διάρκεια της λύσης ενός προβλήματος, πρέπει να μελετηθούν επιμελώς στην τάξη, έτσι ώστε οι μαθητές να καταλάβουν ποιοί είναι οι λόγοι για τους οποίους η λύση που έδωσαν δεν είναι σωστή και να δουν τις ακριβείς διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στη σωστή λύση και στη δική τους· ανάμεσα στη σωστή δραστηριότητα και στο λάθος τους".